GUÍA GENERAL DE TRABAJO GRADO 10°

DOCENTE: **SANDRA PATRICIA GARAY RESTREPO** **Asignatura:** **MATEMÁTICAS**

EL GENIO SE HACE CON 1% DE TALENTO Y 99% DE TRABAJO
(Albert Einstein)

Estándares :

M10.2.4. Uso argumentos geométricos para resolver y formular problemas en contextos matemáticos y en otras ciencias

M10.2.5. Describo y modelo fenómenos periódicos del mundo real usando relaciones y funciones trigonométricas

M10.5.4. Modelo situaciones de variación periódica con funciones trigonométricas

Derecho Básico de Aprendizaje (o aprendizaje a desarrollar):

DBA 14 (10° V1) Comprende la definición de las funciones trigonométricas sen(x) y cos(x), en las cuales x puede ser cualquier número real y calcula a partir del círculo unitario, el valor aproximado de sen(x) y cos(x).

DBA 12 (10° V1) Comprende y utiliza la ley del seno y el coseno para resolver problemas de matemáticas y otras disciplinas que involucren triángulos no rectángulos.

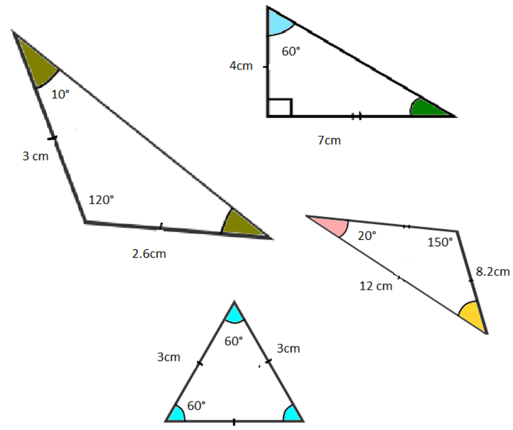
Tiempo estimado de trabajo para el estudiante (Horas): 16H

Trabajo correspondiente a las fechas: Desde: 20 de Abril de 2020 Hasta 15 de Mayo de 2020

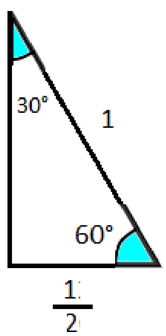
1. **METODOLOGÍA:** En el desarrollo de esta guía nos encontraremos con la solución de diversos problemas en donde se utilicen las relaciones trigonométricas en triángulos rectángulos, además comprenderemos y aplicaremos los teoremas del Seno y del coseno en la resolución de diversas situaciones, reconoceremos ciertos ángulos notables y sus correspondientes valores de las funciones trigonométricas. Lo proyectado son 16 horas, por tanto hay que tener en cuenta lo siguiente: Se esperan directrices para trabajar de acuerdo a un horario diario, por tanto se les sugiere trabajar teniendo en cuenta éste. La guía debe ser desarrollada en el cuaderno, hacer una lectura detallada de ella, leer los conceptos que aparecen en la estructuración, si pueden tener los textos guías, apoyarse en ellos para realizar las actividades; si tienen acceso a internet apóyense en tutoriales, todos los ejercicios deben tener el procedimiento completo, realizar las operaciones necesarias en el cuaderno. Recordar el orden y la presentación en matemáticas son muy importantes para el desarrollo de las actividades.

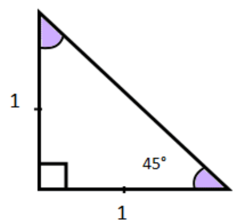
2. EXPLORACIÓN:

2.1. Clasifique cada uno los siguientes triángulos. Halle la medida del ángulo que falta en cada uno y determine la hipotenusa en el triángulo rectángulo.



2.2. Exprese en radianes los ángulos de 30°, 60° y 45°, luego halle las relaciones trigonométricas de cada uno de ellos, apoyándose en los siguientes triángulos rectángulos (exprese el resultado con raíces y con números decimales hasta las milésimas):





3. ESTRUCTURACIÓN:

3. ESTRUCTURACIÓN: Lea detenidamente cada uno de los temas que se van a desarrollar en la guía. Luego desarrolle las actividades propuestas al finalizar cada tema.

3.1. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS NOTABLES O ESPECIALES:

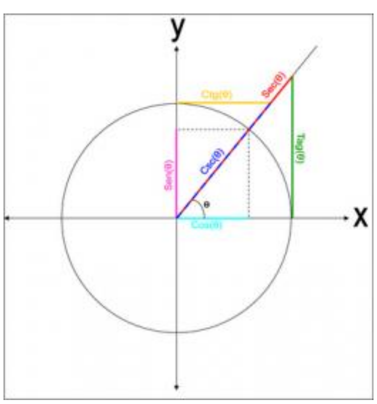


TABLA DE ANGULOS NOTABLES							
RADIANES	GRADOS	SENO	COSENO	TANGENTE	COTANGENTE	SECANTE	COSECANTE
0	0°	0	1	0	Indefinido	1	Indefinido
$\frac{\pi}{6}$	30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$2\frac{\sqrt{3}}{3}$	2
$\frac{\pi}{4}$	45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$2\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{2}$	90°	1	0	Indefinido	0	Indefinido	1
π	180°	0	-1	0	Indefinido	-1	Indefinido
$\frac{3}{2}\pi$	270°	-1	0	Indefinido	0	Indefinido	-1
2π	360°	0	1	0	Indefinido	1	Indefinido

La tabla anterior muestra el valor de las razones trigonométricas para ángulos especiales.
Ejemplos: Halla el resultado de las siguientes operaciones utilizando los valores de la tabla y sin usar la calculadora:

a) $5cos\frac{\pi}{2} - \cos 0 + 2\cos\pi - \cos\frac{3\pi}{2} + \cos 2\pi$; se reemplazan los valores de la tabla de acuerdo a los ángulos:

$$5(0) - 1 + 2(-1) - (0) + (1) = 0 - 1 - 2 - 0 + 1 = -2$$

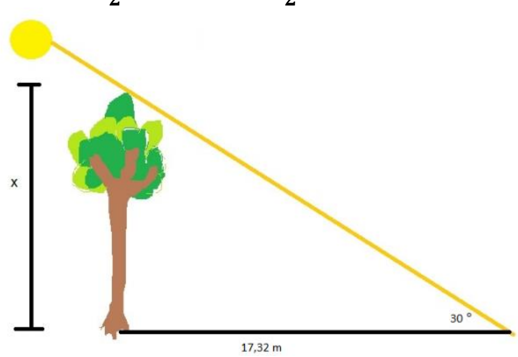
b) $2\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{3} + 4\sin\frac{\pi}{6} - 2\sin\frac{\pi}{2} = 2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 4\left(\frac{1}{2}\right) - 2(1) = 3 + 2 - 2 = 3$

ACTIVIDAD 1:

a) Teniendo en cuenta la ubicación de los ángulos en el plano cartesiano, explique porque para algunos ángulos de la tabla, ciertas relaciones no están definidas?

b) Halla el resultado de las siguientes operaciones utilizando los valores de la tabla y sin usar la calculadora:

1. $\frac{2}{3}\sin\frac{\pi}{2} - 4\sin\frac{3\pi}{2} + 3\sin\pi - \frac{5}{3}\sin\frac{\pi}{2}$
2. $4\sin\frac{\pi}{6} + \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4} + \cos\pi$
3. $\frac{\tan 45° \sec 45°}{\sin 45°} + \sin 30°$
4. $\frac{\sin 30° \sec 60°}{2} - \frac{\cos 60° \csc 30°}{2}$

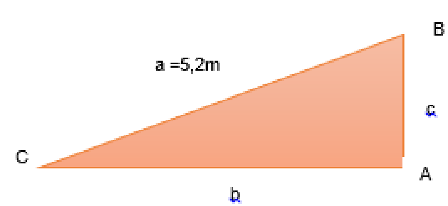


c) Cuando la inclinación de los rayos del sol es de 30°, la sombra de un árbol mide 17,32 m. ¿Cuál es la altura del árbol?

3.2. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS: Consiste en hallar el valor de todos sus lados y todos su ángulos, conociendo mínimo dos elementos, ocasionalmente también se pide hallar su área y/o su perímetro. **EJEMPLOS:**

a) Halle los lados y los ángulos de un triángulo rectángulo del que se conoce: uno de sus ángulos,

B = 37º, y su hipotenusa, a = 5,2 m.



Los dos ángulos agudos deben sumar 90°

C+B = 90°

C= 90° -37°, entonces C= 53°

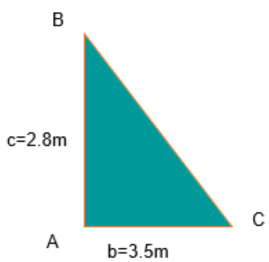
$senB = \dfrac{opuesto}{hipotenusa}$, entonces $sen37° = \dfrac{b}{5{,}2m}$ se despeja la b y se obtiene que $b = 5{,}2sen37°$

$b \cong 3.13m$

$\tan C = \dfrac{opuesto}{adyacente}$, entonces $\tan C = \dfrac{c}{b}$, por tanto $\tan 53° = \dfrac{c}{3.13}$, se despeja c, $c = 3.13\tan 53°$

Se obtiene entonces que $c \cong 4.15m$

NOTA: También se puede utilizar el teorema de Pitágoras para hallar uno de los lados, cuando ya se conocen dos.



b) Halla los lados y los ángulos de un triángulo rectángulo del que se conoce: los dos catetos,

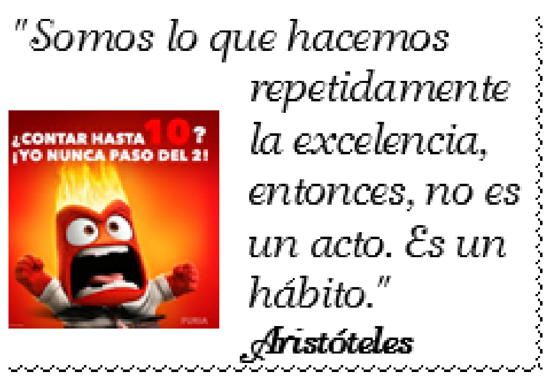
b = 3,5m y c = 2,8m

$\tan C = \dfrac{2.8}{3.5}$. Entonces $\tan C = 0.8$, para hallar el ángulo se utiliza $\tan^{-1}$

$C = \tan^{-1} 0.8$, se utiliza la calculadora y se obtiene $C \cong 38.66°$

C+B=90, luego B= 90° -38.66° y por tanto B= 51.34

$sen38.66° = \dfrac{2.8m}{a}$, se despeja a y se obtiene que $a = \dfrac{2.8}{sen38.66°}$, por tanto $a \cong 4.48m$



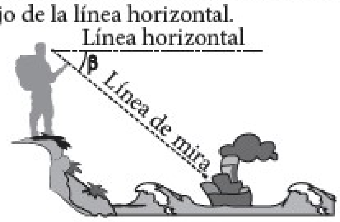
3.3. PROBLEMAS QUE SE RESUELVEN CON TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS Y LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS:

1. **Ángulo de elevación**
Es el ángulo formado por la línea horizontal y la línea de mira cuando el objeto se encuentra por encima de la línea horizontal.

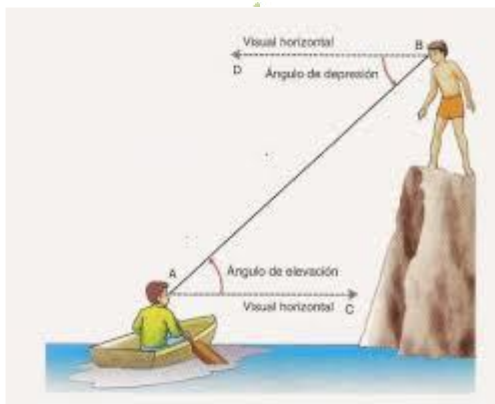
no vertical
y la línea
vador.

α: Ángulo de elevación

2. **Ángulo de depresión**
Es aquel ángulo formado por la línea horizontal y la línea de mira cuando el objeto se encuentra por debajo de la línea horizontal.



β: ángulo de depresión

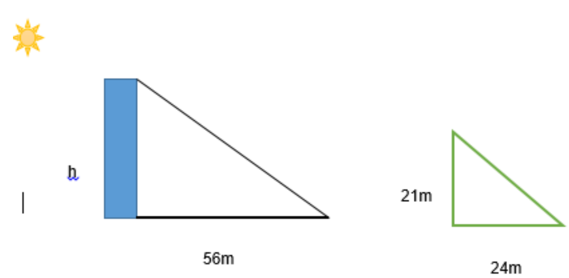


Es fundamental comprender el concepto de estos dos tipos de ángulos ya que aparecen en varios problemas.

Es recomendable, siempre que se resuelvan problemas tener un bosquejo de la situación planteada, como se trata de aplicar lo aprendido con los triángulos rectángulos, es obvio que los dibujos apuntan a identificar el triángulo rectángulo para proceder a aplicar lo que se conoce, utilizando las razones trigonométricas y el teorema de Pitágoras. Estudiemos algunos ejemplos:

a) Halle la altura de un edificio que proyecta una sombra de 56 m. a la misma hora que un árbol de 21 m. proyecta una sombra de 24 m.

Cómo el problema dice que es a la misma hora que se proyecta la sombra, entonces los ángulos de elevación de ambos triángulos rectángulos son iguales, por tanto los dos triángulos son semejantes.



Al ser semejantes podemos establecer la siguiente proporción:

$\frac{altura\_edificio}{altura\_árbol} = \frac{sombra\_edificio}{sombra\_árbol}$, con ésta proporción podemos hallar la altura del edificio

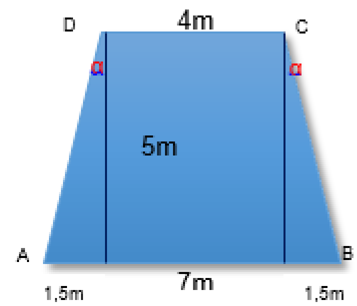
$$\frac{h}{21m} = \frac{56m}{24m}$$

$$h = \frac{56m \times 21m}{24m}$$

$h = 49m$ En este caso no se requirió utilizar las razones trigonométricas

b) Las bases de un trapecio isósceles miden 7 y 4 metros; su altura mide 5 metros. Halla los ángulos del trapecio.

NOTA: La suma de los ángulos internos de un trapecio es 360°



$\tan A = \frac{5}{1.5}$ $\tan A \cong 3.33$

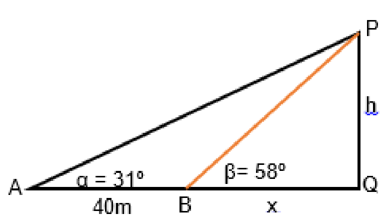
$A \cong \tan^{-1} 3.33$ $A \cong 73.30°$

A=B= 73.30°

$\alpha = 90° - 73.30°$

$\alpha = 16.7°$

C = D =α+90°= 16.7°+90= 106.7°



c) Desde un punto A del suelo se observa una torre, PQ, y se la ve bajo un ángulo ∝ = 31º. Se avanza 40 m. en dirección a la torre, se mira y se la ve, ahora, bajo un ángulo β = 58º. Halla la altura h de la torre y la distancia de A al pie, Q, de la torre.

h=?

AQ=?

Con el triángulo APQ:

$$\tan\alpha = \frac{h}{x + 40m}$$

$h = (x + 40m)\tan\alpha$ (1)

Con el triángulo BPQ

$\tan\beta = \dfrac{h}{x}$

$h = x\tan\beta$ (2)

La ecuación (1) es igual a la ecuación (2) : (1) = (2)

$(x + 40m)\tan\alpha = x\tan\beta$

$(x + 40m)\tan 31° = x\tan 58°$

$x\tan 31° + 40m\tan 31° = x\tan 58°$

$x\tan 31° - x\tan 58° = -40m\tan 31°$

$x(\tan 31° - \tan 58°) = -40m\tan 31°$

$x = \dfrac{-40m\tan 31°}{(\tan 31° - \tan 58°)}$

$x \cong 24{,}05m$

Para hallar h se toma la ecuación (1) o la ecuación (2), tomaremos la (2)

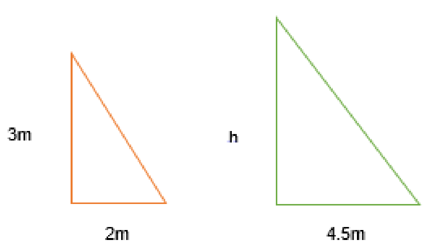
$h = x\tan\beta$

$h = 24{,}05m\tan 58°$

$h = 38{,}5m$

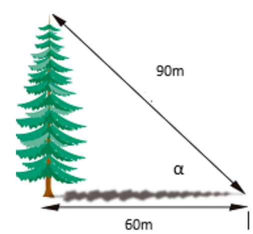
Y para hallar la distancia AQ, se suman x + 40 m = 24,05 m + 40 = 64,05 m

ACTIVIDAD 2: Resuelva los siguientes problemas, si el bosquejo o dibujo no aparece, realícelo:

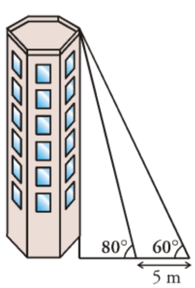


1) Un poste vertical de 3 m proyecta una sombra de 2 m; ¿qué altura tiene un árbol que a la misma hora proyecta una sombra de 4,5 m?

2) Un árbol proyecta una sombra de 60m de larga, y se sabe que la distancia entre la copa del árbol y el punto donde termina su sombra es de 90 m. Encontrar el ángulo de elevación del son en este momento.

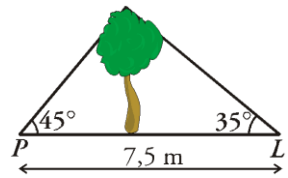


3) Uno de los catetos de un triángulo rectángulo mide 4,8 cm y el ángulo opuesto a este cateto mide 54. Halla la medida del resto de los lados y de los ángulos del triángulo.



4) Para medir la altura de una torre nos situamos en un punto del suelo y vemos el punto más alto de la torre bajo un ángulo de 60. Nos acercamos 5 metros a la torre en línea recta y el ángulo es de 80. Halla la altura de la torre.

5) Pablo y Luis están situados cada uno a un lado de un árbol, como indica la figura:



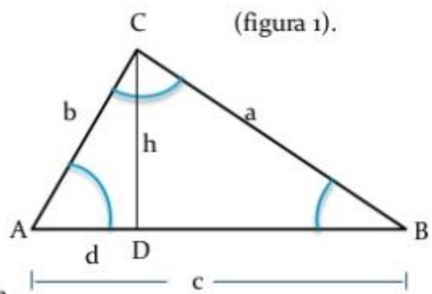
3.4. TEOREMAS DEL SENO Y DEL COSENO: En ocasiones se presentan situaciones en las que no se trabaja con triángulos rectángulos, debemos entonces recurrir a otros teoremas:

Teorema del seno

La ley del Seno se utiliza para solucionar un triángulo oblicuángulo cuando se conoce un lado y dos ángulos o cuando se conocen dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.
Para un triángulo con lados a,b y c y ángulos opuestos a cada lado A,B y C respectivamente, se cumple:

$$\frac{a}{Sen\ A} = \frac{b}{Sen\ B} = \frac{c}{Sen\ C}$$

(figura 1).

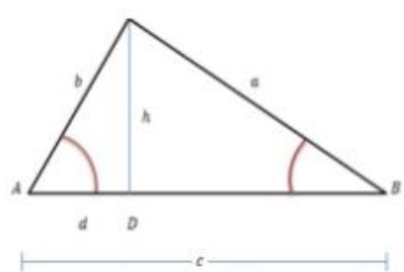


Es decir, en todo triángulo oblicuángulo la medida de los lados es directamente proporcional al seno de los ángulos opuestos.

TEOREMA DEL COSENO

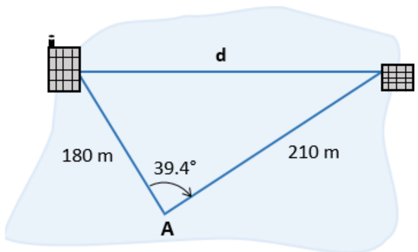
La ley del Coseno se utiliza para resolver un triángulo oblicuángulo cuando se conocen los tres lados del triángulo o cuando se conocen dos lados del triángulo y el ángulo comprendido entre ellos.
Para un triángulo con lados a, b, c y ángulos opuestos a cada lado A, B y C respectivamente, se cumple:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.CosA$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2.a.c.CosB$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b.CosC$$



El cuadrado de la longitud de cada lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, menos el doble producto de las longitudes de estos lados por el ángulo que se forma entre ellos.

EJEMPLOS :



1)Un topógrafo que se le olvidó llevar su equipo de medición, desea calcular la distancia entre dos edificios. El toógrafo se encuentra en el punto A, y con los únicos datos que tiene hasta ahora son las distancias de él respecto a los otros edificios, 180 m y 210 m, respectivamente, también sabe que el ángulo formado por los dos edificios y su posición actual "A" es de 39.4° ¿Qué distancia hay entre los dos edificios?

Para este caso es importante analizar que tipos de datos tenemos al comienzo, y leyendo el enunciado del problema, así como viendo la imagen podemos darnos cuenta que solamente tenemos dos lados y un ángulo entre dichos lados, es lógico que lo primero que tenemos que hacer, será utilizar la ley de Cosenos.

En este ejercicio vemos que el ángulo que tenemos como dato, es opuesto a la distancia que deseamos encontrar, por lo que nuestra fórmula es ideal para aplicarla de comienzo.

$$d^2 = (180m)^2 + (210m)^2 - 2(180m)(210m)\cos(39.4^\circ)$$

despejando el cuadrado del primer miembro:

$$d = \sqrt{(180m)^2 + (210m)^2 - 2(180m)(210m)\cos(39.4^\circ)}$$

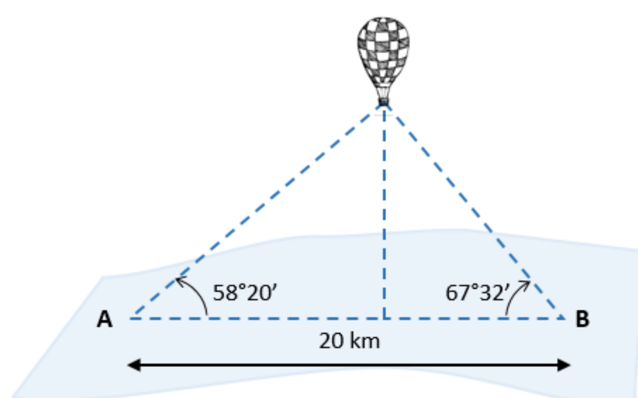
Empezamos a resolver:

$$d = \sqrt{18081.34m^2}$$

d=134.47m

Por lo que la distancia entre los dos edificios es de 134.47 metros aproximadamente.

2) La distancia entre 2 puntos A y B es de 20 km. Los ángulos de elevación de un globo con respecto a dichos puntos son de 58°20' y 67°32'. ¿A qué altura del suelo se encuentran?



Podría tratarse de un problema, sumamente complicado… Pero, no lo es. Por lo tanto procedemos a aplicar la ley de senos… No sin antes, convertir nuestros grados – minutos a grados decimales.

<A = 58°20' = 58.3333
<B =67°32' = 67.5333
Comprobamos el ángulo faltante.

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$
$$\angle C = 180^\circ - \angle A - \angle B$$

Sustituyendo valores

$\angle C = 180° - 58.33° - 67.53° = 54.14°$

Ahora, tenemos los 3 ángulos completos.

Vamos a **calcular el lado a**, que sería el lado opuesto al ángulo A

No podríamos aplicar la ley de cosenos, porque nos haría falta un lado forzosamente, por lo tanto recurrimos aplicar la ley de senos.

$$\frac{a}{senA} = \frac{b}{senB} = \frac{c}{senC}$$

Tenemos los 20Km que el problema nos da de referencia, y tenemos el ángulo opuesto a ese lado, que es el que encontramos de 54.14°, entonces tomamos esos datos para aplicar la ley de senos, a cualquier otro lado.

$$\frac{a}{senA} = \frac{c}{senC}$$

Despejando "a" $\qquad a = \dfrac{c \cdot senA}{senC}$

Sustituyendo valores: $\qquad a = \dfrac{20km \cdot sen(58.33°)}{sen(54.14°)} = 21km$

Por lo que, el lado a mide 21 kilómetros.

Ahora podemos aplicar la función seno del ángulo 67.53 para obtener el cateto opuesto, que sería nuestra altura.

$$sen67.53° = \frac{h}{20.95km}$$

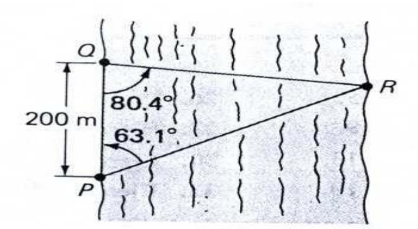
despejando h = altura del globo

$$h = (sen67.53)(21km) = 19.40km$$

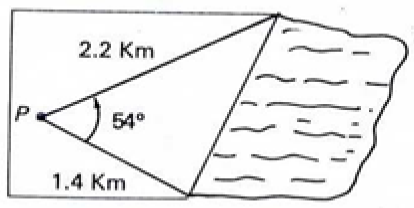
Por lo que la altura del globo, es de 19.4 kilómetros aproximadamente (Redondeando).

ACTIVIDAD 3: Desarrolle los siguientes problemas aplicando el teorema del seno o el teorema deñ coseno, según sea el caso:

a) Para determinar la distancia QR, un topógrafo elige los puntos P y Q en la rivera, donde la distancia entre P y Q es 200m. En cada uno de los puntos se observa el punto R en la



rivera opuesta. El ángulo que tiene lados PQ y PR mide 63.1° y el ángulo cuyos lados son PQ y QR mide 80.4°. ¿Cuál es la distancia a QR?



b) Un punto P está a 1.4 Km. de la orilla de un lago y 2.2 Km. de la otra orilla. Si en P el lago subtiende un ángulo de 54°, ¿Cuál es la longitud del lago?

c) Un árbol crece en el punto medio de una autopista recta. Desde un borde de ésta, el ángulo de elevación de la copa del árbol es de 10° y desde el otro borde es de 8o. La autopista tiene 300 metros de ancho, ¿cuál es la altura del árbol y a qué distancia está de los bordes de la calzada?

d) Una mujer sostiene el extremo de una cuerda que pasa por un polea y tiene un peso atado en el otro extremo. El trozo de cuerda entre la mujer y la polea mide 20 metros y el trozo 'entre la polea y el peso es de 10 metros. La cuerda tiene en la polea un ángulo de 32°. ¿A qué distancia está la mujer del peso?

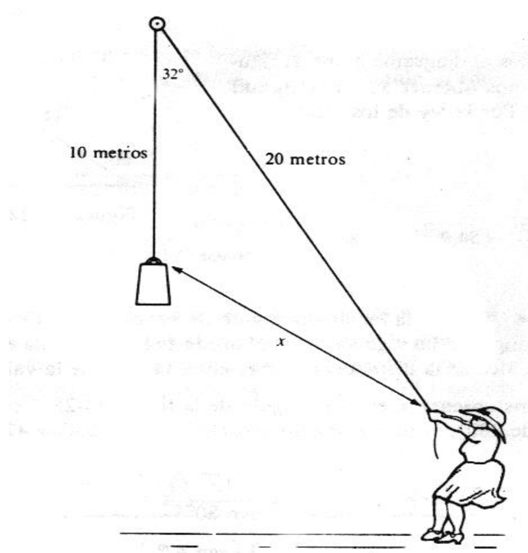


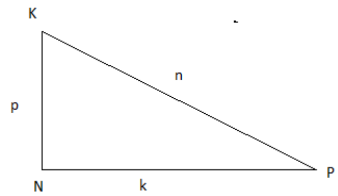
Figura 14-27

4. TRANSFERENCIA: Para desarrollar los siguientes ejercicios debe tener en cuenta lo visto en esta unidad:

1. Felipe debe decorar la diagonal de una bandera rectangular blanca de 4 m por 8 m con una cinta roja. ¿Qué medida debe tener la cinta?
2. Explique por qué el seno y el coseno de un ángulo de 45° son iguales?
3. Explique cómo se puede hallar la medida del lado de un cuadrado si se conoce la medida de una de sus diagonales y no se dispone de instrumentos de medición.
4. La máxima distancia horizontal que alcanza un balón al ser pateado desde la grama se determina con la expresión $x = \frac{2{v_0}^2 \sin A \cos A}{g}$, donde A es el ángulo de tiro y g la aceleración de la gravedad ¿con qué ángulo se logra el mayor alcance: con uno de 30° o de 45° o de 60°? Explique.

5. En un triángulo isósceles, el ángulo determinado por los lados congruentes mide 80° y el lado opuesto a este ángulo mide 16 m.¿ Cuál es la medida de la altura sobre ese lado?

6. Un profesor pidió a sus estudiantes resolver el triángulo rectángulo KNP que aparece en la figura. Estos fueron algunos de los datos encontrados por tres estudiantes:



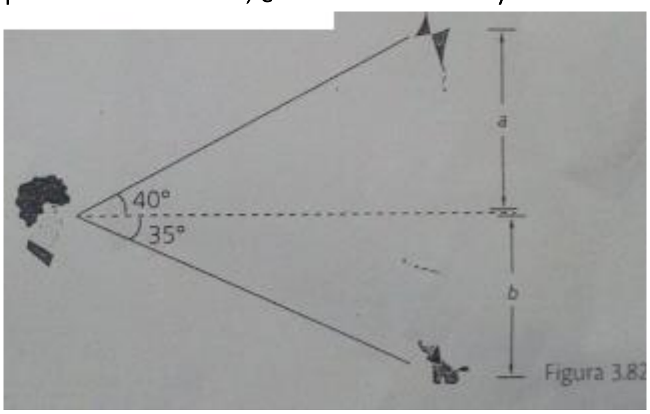
$m\measuredangle P = 25°, \quad m\measuredangle K = 85°, k = 4cm \ y \ n = 4{,}4 \ cm$

$m\measuredangle P = 25°, \quad m\measuredangle K = 65°, k = 4cm \ y \ n = 3{,}4 \ cm$

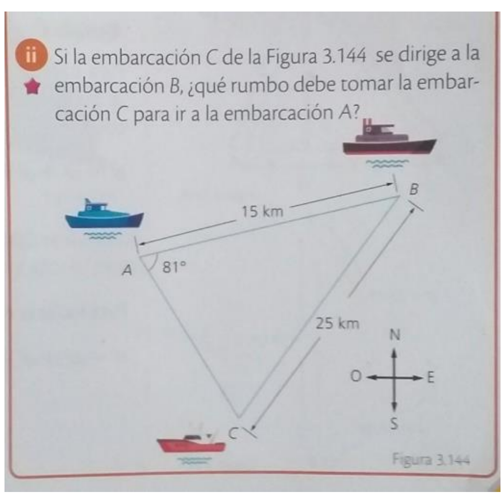
$m\measuredangle P = 25°, \quad m\measuredangle K = 65°, k = 4cm \ y \ n = 4{,}4 \ cm$

¿cuáles de las respuestas anteriores no pueden ser correctas? Justifique la respuesta

7. Observa la figura: Si la distancia de la cometa a la horizontal es 3 m mayor que la distancia del perro a la horizontal, ¿cuántos metros hay entre la cometa y el perro?



8.



9. Halla el área de la región sombreada, si P es el punto medio del segmento CD y la altura del paralelogramo es de 30 cm

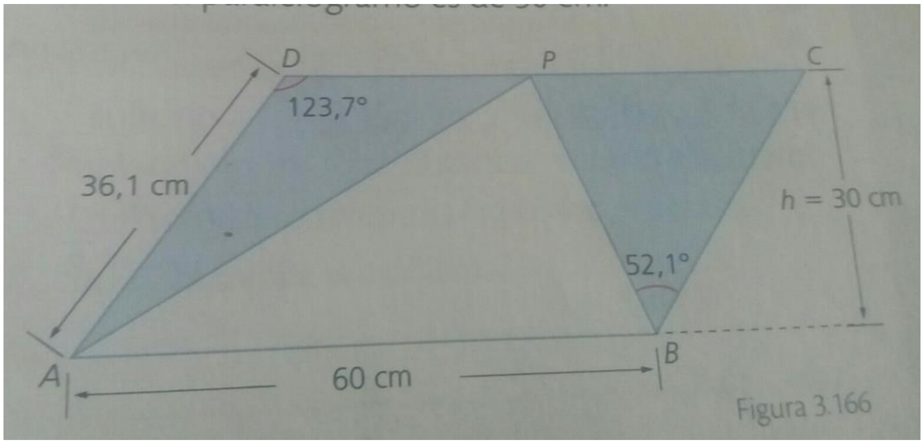


Figura 3.166

5. **VALORACIÓN:** La guía será revisada y deberá ser sustentada, adicionalmente el estudiante debe autoevaluarse, para ello tendrá en cuenta los siguientes criterios: Desarrollo de manera organizada en su cuaderno, realizando los procedimientos completos, no hay tachones, los ejercicios están organizados numéricamente, considera que los desarrollo correctamente, aprovechó al máximo el tiempo.

6. BIBLIOGRAFÍA

Texto guía Vamos a aprender grado 10.
https://www.matematicasonline.es/pdf/ejercicios/Resolucion%20de%20triangulos%20rectangulos.pdf
https://es.slideshare.net/frinconr/teorema-del-seno-y-el-coseno
https://www.fisimat.com.mx/ley-de-cosenos/